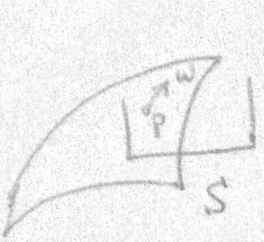
12/12/1

Διαφορική Γεωμετρία

Ασυμπτωτικές Διευθύνσεις



$w \in T_pS - \{0\}$ καλείται ασυμπτωτική

$\iff k_n(w)=0 \iff II_p(w)=0 \iff ea^2+2fab+gb^2=0$,

$w = aX_u + bX_v$

Ασυμπτωτικές Καμπύλες

$c: I \to S$ κανονική

c: ασυμπτωτική $\iff c'(t)$ ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t \in I \iff$

$\iff e(u(t),v(t))\,(u'(t))^2 + 2f(\dots)u'(t)v'(t) + g(\dots)(v'(t))^2 = 0$, $c(t) = X(u(t),v(t))$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων του S

i) Αν οι παρ. καμπύλες του X είναι ασυμπτωτικές καμπύλες, τότε $e=g=0$ στο U

ii) Αν $e=g=0$ στο U και όλα τα σημεία της $X(U)$ είναι υπερβολικά, τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι οι παραμ. καμπύλες του X.

Απόδειξη

i) $k_n(X_u) = \frac{e}{E}$, $k_n(X_v) = \frac{g}{G}$

ii) $f(u(t),v(t))\,u'(t)v'(t) = 0$ $\quad K<0 \iff \frac{eg-f^2}{EG-F^2} < 0 \iff -f^2<0 \iff f \neq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω S επιφάνεια με $K<0$ παντού. Γύρω από κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με $p \in X(U)$ τέτοιο ώστε οι παραμετρικές του καμπύλες να είναι ασυμπτωτικές καμπύλες.

Παράδειγμα

$S: z = x^2 - y^2 = h(x,y) \quad S = \Gamma_h$

$X: \mathbb{R}^2 \to S, \quad X(x,y) = (x, y, h(x,y))$

$$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \qquad f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \qquad g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}$$

$$\Longrightarrow e = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$$f = 0, \quad g = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} < 0$$

Εύρεση Ασυμπτωτικών καμπυλών

Η $c(t) = X(x(t), y(t))$ είναι ασυμπτωτική $\Longleftrightarrow e(x(t),y(t))\,(x'(t))^2 + 2f(\ldots)\,x'(t)\,y'(t) + g(\ldots)\,(y'(t))^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\ }}(x')^2 - \frac{2}{\sqrt{\ }}(y')^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (x')^2 - (y')^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x' - y')(x' + y') = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x - y)' = 0 \quad \text{ή} \quad (x + y)' = 0$$

$$\Longleftrightarrow x(t) - y(t) = c_1 = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad x(t) + y(t) = c_2$$

1η οικογένεια ασυμπτ. καμπυλών

Επιλέγω $x(t) = t$ τότε $y(t) = t - c_1$

$$c(t) = X(t, t - c_1) = (t, t - c_1, t^2 - (t - c_1)^2)$$

$$c(t) = (t, t - c_1, c_1(2t - c_1)) \underset{\text{τις σταθερές}}{\overset{\text{απομονώνω}}{=}} (0, -c_1, -c_1^2) + t(1, 1, 2c_1)$$

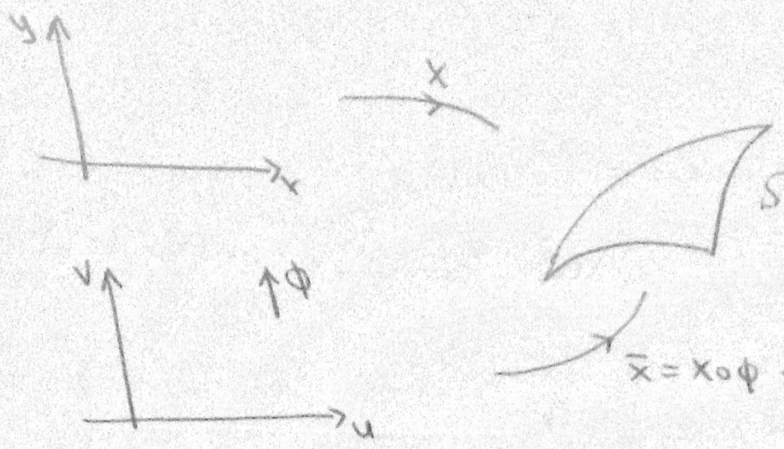
2η οικογένεια ασυμπτ. καμπυλών

Επιλέγω $x(t) = t$, οπότε $y(t) = c_2 - t$

$$c(t) = X(t, c_2 - t) = (t, c_2 - t, t^2 - (c_2 - t)^2) = (t, c_2 - t, -c_2(2t - c_2))$$

$$= (0, c_2, c_2^2) + t(1, -1, -2c_2)$$

Εύρεση συστήματος ασυμπτωτικών συντεταγμένων



$\bar{x} = X \circ \phi$, ϕ : διαφορομορφισμός

Θεωρώ νέες παραμέτρους $u = x - y$, $v = x + y$

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(v-u)\right)$

ϕ : διαφορομορφισμός

Απάντηση

Το σύστημα ασυμπτωτικών συντεταγμένων είναι:

$\bar{X} : \mathbb{R}^2 \to S$, $\bar{X}(u,v) = X \circ \phi(u,v) = X\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(v-u)\right) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(v-u), \frac{1}{2}uv\right)$

$\bar{e} = 0$ $\quad \bar{f} \quad$ $\bar{g} = 0$

$ea^2 + 2fab + gb^2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\ }}a^2 - \frac{2}{\sqrt{\ }}b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ ή $a = -b$

Οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις είναι: $aX_x + bX_y$ ή ισοδύναμα

$a(X_x + X_y)$ ή $a(X_x - X_y)$

$a \neq 0$

Κύριες Διευθύνσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ

$p \in S$: Η εφαπτομενική διεύθυνση $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται κύρια διεύθυνση $\Leftrightarrow$ w είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $L_p : T_pS \to T_pS$.

Γραμμές (ή καμπύλες) καμπυλότητας

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια κανονική καμπύλη $c : I \to S$ καλείται γραμμή καμπυλότητας $\Leftrightarrow$ $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση $\forall t \in I$.

$$\begin{cases} L_p e_1 = k_1(p) e_1 \\ L_p e_2 = k_2(p) e_2 \end{cases}$$

$k_1(p) \neq k_2(p) \Rightarrow e_1 \perp e_2$

$k_1(p) = k_2(p) \Rightarrow$ καθε διεύθυνση του T_pS είναι κύρια διεύθυνση.

Εύρεση κυρίων διευθύνσεων

ΠΡΟΤΑΣΗ

$p \in S$ και $X : U \to S$ σύστημα συν/γμένων με $p \in X(U)$. Το $w = aX_u + bX_v$, $(a,b) \neq (0,0)$ είναι κύρια διεύθυνση $\iff$

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη

$$L_p w = \lambda w \iff L_p(aX_u + bX_v) = \lambda(aX_u + bX_v)$$

$$\iff a L_p X_u + b L_p X_v = \lambda a X_u + \lambda b X_v$$

$$\begin{cases} L_p X_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ L_p X_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v \end{cases} \qquad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\iff a(a_{11} X_u + a_{21} X_v) + b(a_{12} X_u + a_{22} X_v) = \lambda a X_u + \lambda b X_v$$

$$\iff \begin{cases} a a_{11} + b a_{12} = \lambda a \\ a a_{21} + b a_{22} = \lambda b \end{cases} \xrightarrow{\text{με απαλοιφή}} \lambda \left| \dots \right| = 0$$

Εύρεση γραμμών καμπυλότητας

Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας $\iff$

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v(t) & (u'(t))^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(\dots) & G(\dots) \\ e(\dots) & f(\dots) & g(\dots) \end{vmatrix} = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω S επιφάνεια με $\kappa_1 \neq \kappa_2$ παντού και $X: U \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων. Οι παραμετρικές καμπύλες του X είναι γραμμές καμπυλότητας αν-ν $F = f = 0$ στο U.

Απόδειξη

$\Leftarrow$) Έστω ότι $F=f=0$. Η $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad u'v' \begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0$$

Ισχυρισμός $\begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} \neq 0$ παντού στο U

Έστω ότι $\begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0$ σε κάποια σημεία

$$\Leftrightarrow Eg = eG \Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{0}{0} = \frac{g}{G} \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 \text{ άτοπο}$$

(δεν είναι ούτε ομφαλικό ούτε ισόπεδο σημείο.)

$(*) \Rightarrow u' = 0$ ή $v' = 0$

$\Rightarrow$) Έστω ότι οι παραμετρικές καμπύλες είναι οι γραμμές καμπυλότητας

$$X(\underbrace{u(t)=t,\ v=\omega}_{\text{λύσεις της εξίσωσης}}) \quad \text{ή} \quad X(u=\text{σταθ},\ v(t)=t)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Ef - Fe = 0 \quad \text{και} \quad Fg - Gf = 0 \quad (**)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_u, X_v \text{ κύριες διευθύνσεις} \\ \kappa_1 > \kappa_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_u \perp X_v \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(**)} f = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω S επιφάνεια με $\kappa_1 > \kappa_2$ παντού. Για κάθε $p \in S$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X : U \to S$, $p \in X(U)$, τέτοιο ώστε οι παραμ. καμπύλες να είναι οι γραμμ. καμπυλότητας $\Leftrightarrow$ $F = f = 0$

(Άρα έχω διαγωνοποιήσει $1^{η}$ και $2^{η}$ θεμελ. μορφή $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$)